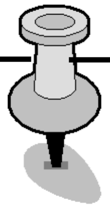

С.Н. Зиненко

Математический анализ

Интегрирование функций нескольких переменных

(сборник задач)

2015

32. Двойные интегралы. Физические и геометрические приложения

<table>
<tr><td colspan="2">№ 32.1. Найти массу пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x,\ y)$</td></tr>
<tr><td>$y = x,\quad y = 0,\quad x = 1\ ;\qquad \rho = xy^3$</td><td>$y = x,\quad y = 1,\quad x = 0\ ;\qquad \rho = x^3 y$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 32.2. Найти заряд пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x,\ y)$</td></tr>
<tr><td>$y = 1,\quad y = x^2,\quad x \ge 0\ ;\qquad \rho = \cos\dfrac{x}{\sqrt{y}}$</td><td>$y = 1,\quad y = \sqrt{x},\quad x = 0\ ;\qquad \rho = \sin\dfrac{x}{y^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 32.3. Найти центр масс пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x,\ y)$</td></tr>
<tr><td>$y = x,\quad y = x^2\ ;\qquad \rho = xy$</td><td>$y = \sqrt{x},\quad y = x^3\ ;\qquad \rho = x^2 y$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти объем тела, ограниченного поверхностями</td></tr>
<tr><td>№ 32.4. $z = 2 - x - 2y,\ z = 0;\ x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$
№ 32.5. $z = xy,\quad z = 0;\quad x + y = 1$</td><td>№ 32.4. $z = 2x + y,\ z = 0;\ x = 0,\ y = 0,\ 2x + y = 2$
№ 32.5. $z = xy,\quad z = 0;\quad y = x,\quad x = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти площадь пластины, ограниченной кривыми</td></tr>
<tr><td>№ 32.6. $y = e^x,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$
№ 32.7. $y = \sqrt{x},\quad y = \frac{1}{2}x,\quad y \le 1$</td><td>№ 32.6. $y = \dfrac{1}{1 + x^2},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$
№ 32.7. $y = \ln x,\quad y = 0,\quad y = 1,\quad x = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Изменить порядок интегрирования</td></tr>
<tr><td>№ 32.8. $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{x^2}^{2x} f(x,\ y)\,dy \Big)\,dx$
№ 32.9. $\int\limits_0^2 \Big(\int\limits_0^{2x - x^2} f(x,\ y)\,dy \Big)\,dx$</td><td>№ 32.8. $\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_x^{e^x} f(x,\ y)\,dy \Big)\,dx$
№ 32.9. $\int\limits_0^{\pi} \Big(\int\limits_0^{\sin x} f(x,\ y)\,dy \Big)\,dx$</td></tr>
</table>

33. Двойные интегралы. Переход к полярным координатам

№ 33.1. Найти массу пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$	
$x^2 + y^2 = a^2$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 = a^2$; $\rho = x^2 + y^2$
№ 33.2. Найти заряд пластины, ограниченной заданными кривыми, с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$	
$x^2 + y^2 = 2ax$; $\rho = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = ax$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
№ 33.3. Найти центр масс однородной пластины, ограниченной заданными кривыми	
$x^2 + y^2 = 2ay$	$x^2 + y^2 = ax$
Найти объем тела, ограниченного поверхностями	
№ 33.4. $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$; $x^2 + y^2 = a^2$ **№ 33.5.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$; $x^2 + y^2 = ax$	**№ 33.4.** $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, $z = 0$; $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ **№ 33.5.** $z = x^2 + y^2$, $z = 0$; $x^2 + y^2 = ay$
Найти площадь пластины, ограниченной кривыми	
№ 33.6. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$ **№ 33.7.** $r = a(1 + \cos\varphi)$ **№ 33.8.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **№ 33.9.** $xy = a$, $xy = b$, $(0 < a < b)$ $y = cx^2$, $y = dx^2$, $(0 < c < d)$	**№ 33.6.** $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$ **№ 33.7.** $r = a\sin 3\varphi$ **№ 33.8.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{x}{a}$ **№ 33.9.** $xy = a$, $xy = b$, $(0 < a < b)$ $y = cx$, $y = dx$, $(0 < c < d)$

34. Тройные интегралы. Физические и геометрические приложения

№ 34.1. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$	
$z = x^2 y, \quad z = 0, \quad y = (x-1)^2, \quad y = x+1;$ $\rho = \dfrac{z}{x^3 y^2}$	$z = xy^2, \quad z = 0, \quad y = 4x - x^2, \quad y = 4 - x;$ $\rho = \dfrac{z}{x^2 y^3}$
№ 34.2. Найти заряд тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$	
$z = \pi, \quad z = x^4 y^2, \quad y = \frac{1}{2}(x+1), \quad y = 1, \quad x = -1;$ $\rho = \dfrac{\cos z}{\sin\left(x^4 y^2\right)}$	$z = \frac{\pi}{2}, \; z = x^3 y, \quad y = 1 - x, \; y = 1, \; x = 1;$ $\rho = \dfrac{\sin z}{\cos\left(x^3 y\right)}$
№ 34.3. Найти центр масс однородной пирамиды, ограниченной плоскостями	
$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1, \; z = 0, \; y = 0, \; x = 0 \; (a, \, b, \, c > 0)$	$z = ax + by, \; z = c, \; y = 0, \; x = 0 \; (a, \, b, \, c > 0)$
№ 34.4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями	
$z = xy, \quad z = 0; \quad x + y = 1$	$z = xy, \quad z = 0; \quad y = x, \quad x = 1$

35. Тройные интегралы. Переход к цилиндрическим координатам

№ 35.1. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$	
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$; $\rho = \left(x^2 + y^2\right) \cdot z^2$	$z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$; $\rho = \left(x^2 + y^2\right) \cdot z$
№ 35.2. Найти заряд тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$	
$z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ay$; $\rho = \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{z}$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z$
№ 35.3. Найти центр масс тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$	
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = a$; $\rho = \left(x^2 + y^2\right)^2 \cdot z$	$z = x^2 + y^2$, $z = a$; $\rho = \left(x^2 + y^2\right) \cdot z^3$
Найти объем тела, ограниченного поверхностями	
№ 35.4. $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$ **№ 35.5.** $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$ **№ 35.6.** $z = c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}$, $z = c$	**№ 35.4.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ay$ **№ 35.5.** $z = 2 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ **№ 35.6.** $z = c\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)$, $z = c$

36. Тройные интегралы. Переход к сферическим координатам

<table>
<tr><td colspan="2">№ 36.1. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x,\ y,\ z)$</td></tr>
<tr><td>$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $\rho = x^2 + y^2 + z^2$</td><td>$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $\rho = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 36.2. Найти заряд тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x,\ y,\ z)$</td></tr>
<tr><td>$x^2 + y^2 + z^2 = 2az$; $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$</td><td>$x^2 + y^2 + z^2 = az$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 36.3. Найти центр масс тела, ограниченного заданными поверхностями, с объемной плотностью $\rho = \rho(x,\ y,\ z)$</td></tr>
<tr><td>$x^2 + y^2 + z^2 = az,\quad z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$;
$\rho = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$</td><td>$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\quad z \le \sqrt{x^2 + y^2}$;
$\rho = x^2 + y^2 + z^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти объем тела, ограниченного поверхностями</td></tr>
<tr><td>№ 36.4. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\quad z \ge \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$
№ 36.5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$</td><td>№ 36.4. $x^2 + y^2 + z^2 = az,\ z \ge \sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)}$
№ 36.5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2\dfrac{z}{c}$</td></tr>
</table>

37. Криволинейные интегралы по длине (масса, заряд)

№ 37.1. Найти массу кривой L с линейной плотностью $\rho=\rho(x,\,y,\,z)$	
$L=\left\{\begin{bmatrix} x=\cos t \\ y=\sin t\,, & t\in\left[\,0,2\pi\,\right] \\ z=t \end{bmatrix}\right\};\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}\cdot z$	$L=\left\{\begin{bmatrix} x=\operatorname{ch} t \\ y=\operatorname{sh} t\,, & t\in\left[\,0,\,1\,\right] \\ z=t \end{bmatrix}\right\};\ \rho=\dfrac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$
№ 37.2. Найти заряд кривой L с линейной плотностью $\rho=\rho(x,\,y,\,z)$	
$L=\left\{\begin{bmatrix} x=e^{-t}\cos t \\ y=e^{-t}\sin t\,, & t\in\left[\,0,+\infty\,\right) \\ z=e^{-t} \end{bmatrix}\right\};\ \rho=xyz$	$L=\left\{\begin{bmatrix} x=\cos e^{-t} \\ y=\sin e^{-t}\,, & t\in\left[\,0,+\infty\,\right) \\ z=e^{-t} \end{bmatrix}\right\};\ \rho=xyz$
№ 37.3. Найти центр масс однородной кривой L	
$L=\left\{\begin{bmatrix} x=\cos t \\ y=\sin t\,, & t\in\left[\,0,2\pi\,\right] \\ z=t \end{bmatrix}\right\};\ \rho=const$	$L=\left\{\begin{bmatrix} x=e^{-t}\cos t \\ y=e^{-t}\sin t\,, & t\in\left[\,0,+\infty\,\right) \\ z=e^{-t} \end{bmatrix}\right\};\ \rho=const$
№ 37.4. Найти длину кривой L	
$L=\left\{\begin{bmatrix} x=t\cos\sqrt{2}\,t \\ y=t\sin\sqrt{2}\,t\,, & t\in\left[\,0,\,1\,\right] \\ z=t \end{bmatrix}\right\}$	$L=\left\{\begin{bmatrix} x=t\cos t-\sin t \\ y=t\sin t+\cos t\,, & t\in\left[\,0,\,1\,\right] \\ z=t \end{bmatrix}\right\}$

38. Криволинейные интегралы по координатам (работа силы)

№ 38.1. Найти работу силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки из начала A в конец B кривой L_{AB}	
$L_{AB}=\left\{\left[\begin{array}{l} x=\operatorname{ch}t \\ y=\operatorname{sh}t, \quad t\in\left[-1,+1\right] \\ z=t \end{array}\right.\right\};\ \vec{F}=\begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$	$L_{AB}=\left\{\left[\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\sin t, \quad t\in\left[-\pi,+\pi\right] \\ z=t \end{array}\right.\right\};\ \vec{F}=\begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}$
№ 38.2. Найти работу силы $\vec{F}_{TP}$ трения при перемещении материальной точки по плоской кривой $L_{AB}=\left\{\left[\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \end{array}\right., \ t\in\left[\alpha,\beta\right]\right\}$	**№ 38.2.** Найти работу силы $\vec{F}_C$ сопротивления воздуха при перемещении материальной точки по кривой $L_{AB}=\left\{\left[\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t), \quad t\in\left[\alpha,\beta\right] \\ z=z(t) \end{array}\right.\right\}$
№ 38.3. Найти работу силы $\vec{F}_T$ тяготения, создаваемой материальной точкой массой M, находящейся в начале координат, при перемещении материальной точки массой m по кривой $L_{AB}=\left\{\left[\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t), \quad t\in\left[\alpha,\beta\right] \\ z=z(t) \end{array}\right.\right\}$	**№ 38.3.** Найти работу силы $\vec{F}_y$ упругости, создаваемой бесконечно растяжимой струной, прикрепленной к началу координат, при перемещении материальной точки по кривой $L_{AB}=\left\{\left[\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t), \quad t\in\left[\alpha,\beta\right] \\ z=z(t) \end{array}\right.\right\}$
№ 38.4. Найти работу векторного поля $\vec{F}(\vec{r})=\operatorname{grad} f(\vec{r})$ при перемещении материальной точки из начала A конец B кривой L_{AB}	
$L_{AB}=\left\{\left[\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t), \quad t\in\left[\alpha,\beta\right] \\ z=z(t) \end{array}\right.\right\}$	$L_{AB}=\left\{\left[\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t), \quad t\in\left[\alpha,\beta\right] \\ z=z(t) \end{array}\right.\right\}, \quad A=B$

39. Поверхностные интегралы по площади (масса, заряд)

<table>
<tr><td colspan="2">№ 39.1. Найти массу поверхности S с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x,\, y,\, z)$</td></tr>
<tr><td>$S=\left\{ z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad x^2+y^2\le a^2 \right\};$
$\rho=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\cdot z}$</td><td>$S=\left\{ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le ax \right\};$
$\rho=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\cdot z$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 39.2. Найти заряд поверхности S с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x,\, y,\, z)$</td></tr>
<tr><td>$S=\left\{ z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\le ay \right\};$
$\rho=\left(x^2+y^2\right)\cdot z$</td><td>$S=\left\{ z=xy,\quad x^2+y^2\le a^2 \right\};$
$\rho=\left(x^2+y^2\right)\cdot z$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 39.3. Найти центр масс поверхности S с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x,\, y,\, z)$</td></tr>
<tr><td>$S=\left\{ z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad x^2+y^2\le a^2 \right\};$
$\rho=\dfrac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$</td><td>$S=\left\{ z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\le a^2 \right\};$
$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\cdot z^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 39.4. Найти площадь поверхности S</td></tr>
<tr><td>$S=\left\{ z=xy,\quad x^2+y^2\le a^2 \right\}$</td><td>$S=\left\{ z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad x^2+y^2\le a^2 \right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 39.5. Найти площадь поверхности S</td></tr>
<tr><td>Часть сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами
$S=\left\{ \left[\begin{array}{l} x=r_0\cos\varphi\sin\theta \\ y=r_0\sin\varphi\sin\theta \\ z=r_0\cos\theta \end{array}\right. \right\},$
$(\varphi,\ \theta)\in\Omega=\left\{ \alpha\le\varphi\le\beta,\ \gamma\le\theta\le\delta \right\}$</td><td>Часть геликоида
$S=\left\{ \left[\begin{array}{l} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=v \end{array}\right. \right\},$
$(u,\ v)\in\Omega=\left\{ \alpha\le u\le\beta,\ \gamma\le v\le\delta \right\}$</td></tr>
</table>

40. Поверхностные интегралы по координатам (поток вектора)

№ 40.1. Найти количество жидкости (объем), протекающее в единицу времени через верхнюю сторону поверхности S_+, со скоростью $\vec{v}(\vec{r})$	
$S_+ = \left\{ z = xy,\ \ x^2+y^2 \le a^2 \right\};\quad \vec{v}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$	$S_+ = \left\{ z = x^2+y^2,\ \ x^2+y^2 \le a^2 \right\};\ \vec{v}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x \\ z \\ y \end{bmatrix}$
№ 40.2. Найти величину заряда, протекающего в единицу времени через нижнюю сторону поверхности S_-, с плотностью заряда $\rho(\vec{r})$ и со скоростью $\vec{v}(\vec{r})$	
$S_- = \left\{ z = x^2+y^2,\ \ x^2+y^2 \le a^2 \right\}$; $\vec{v}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}$ $\rho(\vec{r}) = x\cdot y\cdot z$	$S_- = \left\{ z = xy,\ \ x^2+y^2 \le a^2 \right\}$; $\vec{v}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix}$ $\rho(\vec{r}) = x\cdot y\cdot z$
№ 40.3. Найти поток вектора $\vec{F}(\vec{r})$ через коническую поверхность	
$S = \left\{ z = a\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in D \right\};\ \vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$	$S = \left\{ z = a\sqrt{x^2+y^2},\ \ (x,y)\in D \right\};\ \vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert^3}$
Найти поток вектора $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ через поверхность	
№ 40.4. $S_+ = \left\{ \begin{bmatrix} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{bmatrix},\quad (0 \le u \le a,\ 0 \le v \le 2\pi) \right\}$	**№ 40.4.** $S_+ = \left\{ \begin{bmatrix} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{bmatrix},\quad (0 \le u \le a,\ \ 0 \le v \le 2\pi) \right\}$
№ 40.5. часть сферы $S_+ = \left\{ \lvert\vec{r}\rvert = r_0 \right\}$ площади S	**№ 40.5.** часть плоскости $\left(\vec{r} - \vec{r}_0,\ \vec{n} \right) = 0$ площади S